Bí Kíp Bất Đẳng Thức Như Lai Thần Trưởng

Version 1.0 Super Kill

I, Giới thiệu

Chào các em, khi các em đang đọc những dòng này là trên tay các em đang sở hữu tâm pháp công phá Bất Đẳng Thức đề THPT Quốc Gia bằng máy tính fx – 570 es, vn, vinacal plus. Bất Đẳng Thức luôn là một câu khó nhất trong đề Đại Học và số lượng 10 điểm hằng năm cũng không có nhiều, thế nhưng không có nghĩa là chúng ta từ bỏ, và đặc biệt là làm Toán rất dư thời gian kể cả là khi soát xong, vậy nên tại sao chúng ta không dành thời gian dư đó để kiếm thêm 0,25-0,5 điểm với học sinh khá, còn khá cứng thì hạ gục nó luôn.

Với tư cách là 1 người đi trước, đã từng được 10 môn Toán đề khối B năm 2013, hôm nay thì anh xin được chia sẻ những thủ thuật, những " mánh" của anh để chinh phục BĐT, và bật bí thêm là cấp 3 anh cũng học 1 trường bình thường của Huyện chứ không phải trường chuyên lớp chọn gì mà còn làm được BĐT.

Bí kíp này là 1 trong 4 bí kíp anh đã phát về môn Toán, trước khi đọc bí kíp này các em nên đọc thêm về Bí Kíp Hệ và Phương Trình, Bất phương trình để làm quen và vững chắc hơn.

II, Yêu cầu

1. Có thái độ học tập chăm chỉ, cần cù, không từ bỏ và tự tin vào bản thân
2. Có 1 chiếc máy tính cầm tay fx 570 es hoặc vn , vinacal

III, Nội dung

Phần 1 : Các kiến thức cơ bản cần nắm vững

1. Bất đẳng thức Cô-si cho 2 và 3 số không âm :

Đánh giá tổng với tích : $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ $\quad\quad$ $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$

Dạng phân số: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ $\quad\quad$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$

Tổng và tổng bình phương: $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2\ge 4xy$ $\quad$ $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2\ge 9xyz$

Dấu "=" sảy ra tại $x=y$

Trong Bất đẳng thức này cần chú ý tới "Điểm rơi là dấu "=" sảy ra tại đâu điều này rất quan trọng để khi ta ghép cho đúng. Và BĐT này có trong sách giáo khoa lớp 10 do đó mà ta không cần phải chứng minh thêm và trong những năm gần đây BĐT này càng được sử dụng nhiều trong đề thi thử và ĐH.

2. Một số bất đẳng thức phụ cần biết:

Với $ab\ge 1$ thì $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$ với $ab<1$ thì bất đẳng thức đổi chiều, dấu "=" sảy ra khi a=b=1

3. Phân tích cấu trúc bài Bất Đẳng Thức trong đề Đại Học

Trích câu 10 đề Toán THPT QG 2016 :

Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$$

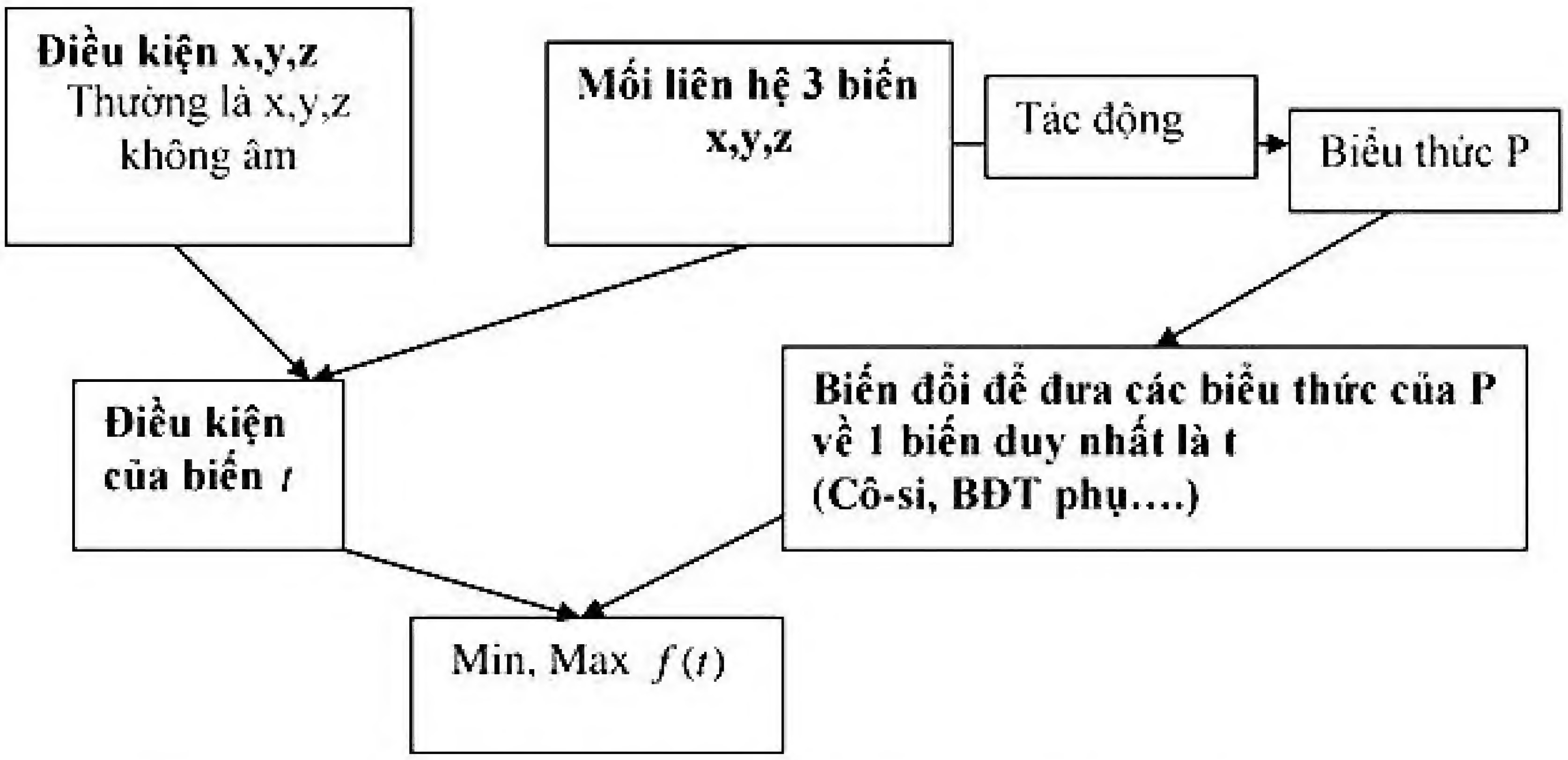
Tóm tắt bài toán: $\begin{cases} a,b,c\in[1;3] \\ a+b+c=6 \\ P=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\dfrac{1}{2}abc \end{cases}\rightarrow P_{max}=?$

Rõ ràng thường thì các bài BĐT thi ĐH đều là 3 biến và họ thường cho không âm để các em có thể sử dụng Cô-si, bên cạnh đó thì họ cho 1 biểu thức liên hệ giữa 3 biến ở đây là $a+b+c=6$

Điều kiện này có 2 chức năng quan trọng sau :

+ Một là để đánh giá, biến đổi để đưa P thành 1 hàm duy nhất với 1 biến duy nhất là $P=f(t)$
+ Hai là để tìm điều kiện của biến t từ đó mới xét hàm được

4. Hướng làm 1 bài Bất Đẳng thức:



Mục tiêu của toàn bộ quy trình này là dồn từ 3 biến về 1 biến sử dụng các biến đổi tương đương hay bất đẳng thức cô, si hay BĐT phụ từ đó đưa P về 1 hàm số duy nhất, tiếp đó thì ta tìm điều kiện của biến và xét hàm là xong.
Đây là xu hướng chung các năm gần đây, và BGD thường cho dấu = 3 biến lệch nhau chứ không cho $x = y = z$ đâu như vậy mới hay và khó.

5. Vai trò của máy và cơ sở của phương pháp.

Nhiều bạn tự hỏi anh nói từ nãy tới giờ thì em máy ở đây có tác dụng gì?
Máy tính ở đây có tác dụng là tìm ra dấu " = " khi P đặt Max hay Min thì x , y, z bằng bao nhiêu? Từ đó ta dự đoán cách dồn biến để biến đổi P về biến đó, và điều quan trọng thứ 2 là để ta chắc chắn mỗi dấu = khi ta ghép các biến với nhau để không xảy ra tình trạng đánh giá không đúng
Ví dụ nhé, thường thấy xyz thì ta có các đánh giá sau:
$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ở đây thì dấu "=" sảy ra tại $x = y = z$
Nhưng vấn đề là ở chỗ, khi ta bấm máy ra được kết quả P Max thì $x = 3, y = 2, z = 1$ cơ
Thì khi đó ta lại sử dụng đánh giá khác $(x-2)+(y-1)+z \geq 3\sqrt[3]{(x-2)(y-1)z}$
Do đó mà việc biết dấu "=" của x,y,z tại đâu vô cùng lợi hại và quan trọng.

***Cơ sở của phương pháp:** Làm cách nào mà ta có có thể tìm được dấu "=" ??? Biểu thức kia 3 biến cơ mà?
Ta sẽ dễ dàng đưa P về 2 biến nhờ mối liên hệ giữa 3 biến và thật tình cờ và bất ngờ ta được hàm 2 biến lúc này ta chỉ việc coi 1 biến là tham số và 1 biến là ẩn chính.
Và khảo sát, đối với Đồn Long Casio ngoài tuyệt chiêu Solve thì skill Table trong trường hợp này áp dụng vô cùng tốt vào việc khảo sát giá trị hàm trên 1 đoạn.
Chúng ta sẽ cùng sang các ví dụ và phân tích cụ thể.
Loại 1: Dồn 3 biến thành 1 biến duy nhất
Đây thường là dạng khó, vì phải đánh giá cùng 1 lúc cả 3 biến nhưng nó lại có 1 cách làm chung, dấu hiệu nhận biết thường gồm đầy đủ điều kiện, mối liên hệ 3 biến và các biến không đối xứng cho lắm tức là a, b có thể đổi chỗ cho nhau nhưng a và c thì không
Mở mà là lễ thành hôn của boy cô đơn Casio và gái xinh 2016 miss BĐT :

Bài 1(THPT QG – 2015): Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc$$

Phân tích:

Nhìn vào bài này, nhiều em thấy ngay a,b,c đối xứng tức là thay đổi vai trò được cho nhau và Gia Cát Dự $a=b=c=2\in[1;3]$ thấy rất là hợp lý, và cứ hồn nhiên đánh giá với dấu "=" như vậy, kaka

Và mọi sự cố gắng để đổ suông xông xuống bể.

Đầu tiên, ta sẽ thế $c=6-a-b$ vào P để được biểu thức có 2 ẩn a,b

Ý tưởng: Ta sẽ cho a chạy từ 1 tới 3 và b cố định để xem P tăng lên hay giảm đi, có giá trị nào đẹp không? Sau đó ta lại tăng b lên và cho a chạy xem có cái nào đẹp không :D

***Ban đầu**

Chọn a =X, b =1, c =5 - X ta có:

$$P=\frac{X^2+(1+X^2)(5-X)^2+12X(5-X)+72}{X+(1+X)(5-X)}-\frac{X(5-X)}{2}$$

Các em chú ý là nên viết gọn biểu thức P lại $b^2c^2+c^2a^2=c^2(a^2+b^2)$ để đỡ tốn kí tự để phòng bị đầy kí tự

Sau đó các em bấm **Mode 7** để vào tính năng **Table**

Sau đó nhập hàm

$$f(x)=\frac{X^2+(1+X^2)(5-X)^2+12X(5-X)+72}{X+(1+X)(5-X)}-\frac{X(5-X)}{2}$$

Đối với máy 570 es plus thì chỉ có hàm f(x) còn riêng 570 vn plus thì có thêm hàm g(x)

Em nào dùng 570 vn plus thì nhập

Với a=X, b=2, c =4 - X

$$g(x)=\frac{4X^2+(4+X^2)(4-X)^2+12.2.X(4-X)+72}{2X+(2+X)(4-X)}-\frac{2X(4-X)}{2}$$

Với máy 570es plus không có g(x) thì tí nhập lại Với Start 1 = End 2.9 = và Step 0,1 =

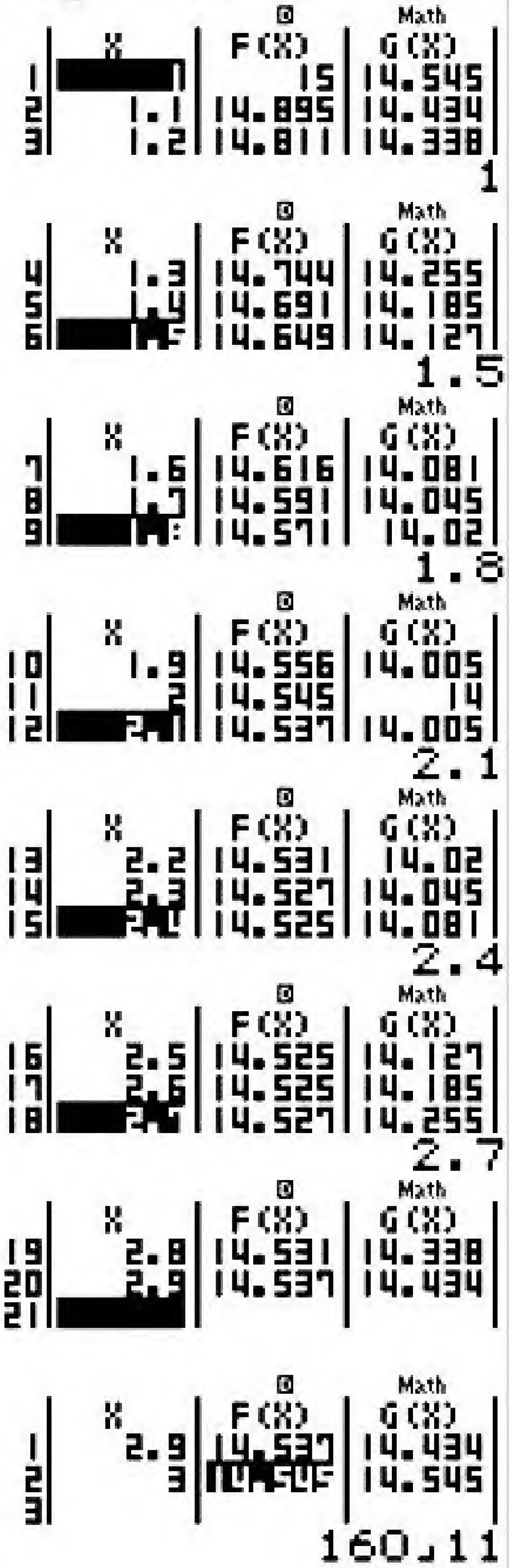
Trong bí kíp này anh hướng dẫn theo máy 570 vn plus bởi nó có 2 bảng rất tiện lợi cho việc so sánh các giá trị và đẩy mạnh tốc độ lên 2 lần

Giải thích: Table là 1 hàm thống kê giá trị của hàm số theo giá trị của biến, với **Start** là giá trị khởi đầu của biến, **End** là giá trị kết thúc, trong đó **Step** là bước nhảy là khoảng các giữa 2 giá trị liên tiếp của biến

Và ghi nhớ 1 điều Table chỉ có thể tính tối đa **30 giá trị**.

Mà từ 1 tới 3 là 31 giá trị do có thêm số 0 nên ta chỉ cần tính từ 1 tới 2.9 em nào cẩn thận thì tính nốt 3 nữa

Chúng ta sẽ thu được kết quả như sau:



***Với a=X, b=1, c =5 – X**

Ta sẽ soi các giá trị đẹp trước:

$X = 1 \to f(X) = 15$

$X = 2, X = 3 \to f(X) = \frac{160}{11}$

$X = 2{,}5 \to f(X) = 14{,}525$

Trong 3 cái này thì cái X=1 là lớn nhất nhưng c = 4 mà $c \in [1;3]$ do đó loại

Và lớn nhất trong mấy giá trị đẹp là tại X=2 và X=3

Đáng nhẽ ngay từ đầu ta để nó chạy từ 2 → 3 thì dỡ phải thêm lần nữa vì $c \le 3 \to X \ge 2$ (nhưng do cái G(X) kia không cần $X \ge 2$ mà ta bấm cùng 1 lượt nên cứ phải đưa vào cho đủ đoạn cần xét)

Nhìn tổng quát từ $2 \to 3$ thấy X tăng thì F(X) giảm dần rồi tăng lên và rõ ràng nó lớn nhất tại 2 đầu mút X=2 và X=3

Vậy a=2,b=1,c=3 hoặc a=3,b=1,c=2 thì P = 160/11

***Với a=X, b=2, c =4 – X**

Ta lại soi các girl xinh :

Ngay dòng đầu lại là $X = 1 \to P = 160/11$

$X = 2 \to P = 14 \quad X = 3 \to P = 160/11$

Ta lại nhận thấy rằng khi X tăng từ $1 \to 2$ thì G(X) giảm còn $2 \to 3$ thì lại tăng, do đó giá trị lớn nhất vẫn ở 2 đầu mút là X=1, X=3

Vậy : a=1,b=2,c=3 hoặc a=3,b=2,c=1

(nói thêm tại chỗ a=b=c=2 là Min chứ ko phải Max)

Nếu các em cẩn thận hơn thì cứ cho $b \to 1 \to 1{,}5 \to 2 \to 2{,}5 \to 3$

Nhưng như vậy sẽ hơi lâu, nên chú ý vào các giá trị đẹp.

Khi nhận xét bảng thì nhìn cả theo chiều dọc là a=X tăng thì sao? Và theo chiều ngang thì b tăng thì sao?

Ở bài này ta thấy ngay nó cứ quanh quẩn đi các hoán vị của $a = 1, b = 2, c = 3$

Vậy là sau một thời gian thống kê khoảng 10 phút chúng ta đã có $a = 1, b = 2, c = 3$

Do đó mà chứng minh $a = b = c$ là 1 sai lầm.

Ta dồn 3 biến thành 1 dựa vào P thì có 3 cách sau

t = abc = 6 hoặc t = ab+ bc + ca =11 hoặc $t = a^2 + b^2 + c^2 = 14$

Xử lí điều kiện để xem ta được điều kiện của biến nào từ đó chọn nó làm biến cuối cùng

$$a,b,c\in[1;3]\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0\\(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1\ge 0\\3(ab+bc+ca)-abc-9(a+b+c)+27\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab+bc+ca\le abc+5\\3(ab+bc+ca)\ge abc+27\end{cases}\Rightarrow 2(ab+bc+ca)\ge 22\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 11$$

Vậy ở đây các em đặt t = ab+bc+ca hoặc t =abc đều được

Đặt $t=ab+bc+ca$

Ta mới chặn dưới nó, giờ phải chặn trên nữa

Theo Cô-si ta có : $36=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca)\to t\le 12$ **vậy** $t\in[11;12]$

Chỗ này tìm thêm thôi chứ dấu "=" chỗ này là $a=b=c$ nhưng bài toán là t=11 chứ không phải t=12 nên không sao cả.

Tới đây mới được 0,25 thôi nhé , chỗ xử lí điều kiện là phải có kinh nghiệm

Ta đã biết là dấu bằng sảy ra tại đầu mút t = 11 giờ ép về cái hàm luôn nghịch biến là xong

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2}$$ **biến đổi về ẩn t**

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ **làm ta nghĩ về** $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc$

Bỗng dưng cho đẹp

$$\to\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}=\frac{t^2+72}{t}$$

$$\to\frac{abc}{2}\ge\frac{(ab+bc+ca)-5}{2}=\frac{t-5}{2}$$

Vậy : $P=\dfrac{t^2+72}{t}-\dfrac{abc}{2}\le\dfrac{t^2+72}{t}-\dfrac{t-5}{2}=f(t)$ **với** $t\in[11;12]$ **thôi giờ đạo hàm là xong.....**

$f'(t)=\dfrac{t^2-144}{2t^2}\le 0\forall t\in[11,12]\to P\le f(t)\le f(11)=\dfrac{160}{11}\to P_{max}=\dfrac{160}{11}$ khi $a=1,b=2,c=3$ và các hoán vị của bọn chúng.

Nhận xét: Đây là 1 bài chuẩn mực sử dụng tuyệt chiêu Casio để tìm dấu "=" của BĐT và từ đó định hướng bài làm, công cụ này hỗ trợ tăng 66% nội công cho các sĩ tử để chiến thắng trong cuộc chiến giành điểm 10 và trong đó 33% còn lại là kiến thức, kinh nghiệm tích lũy được và dĩ nhiên 1% là sự may mắn

Tiếp theo ta sang:

Bài 2 (A – 2014): Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$$

Phân tích:

Dạng của bài này cũng tương tự bài trước, năm 2014 phân khối và đề khối A là khó nhất rồi, bài này thì vẫn dạng như bài kia nhưng cứng hơn 1 chút.

$$\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ x,y,z \leq \sqrt{2} \approx 1,4 < 1,5 \end{cases}$$

Ở bài này các em lưu ý biểu thức P dài, anh đã bấm thử và không đủ số kí tự, vì máy tối đa là được khoảng 80 kí tự thôi những kí tự như bình phương hay căn và phân số khá là tốn bộ nhớ.

Nên bài này ta phải viết gọn : $\dfrac{y+z}{x+y+z+1}=1-\dfrac{x+1}{x+y+z+1}$ thay vì để $\dfrac{y+\sqrt{2-x^2-y^2}}{x+y+\sqrt{2-x^2-y^2}+1}$

- Với $x=X, y=0, z=\sqrt{2-X^2}$

$f(x)=\dfrac{X^2}{X^2+X+1}+1-\dfrac{X+1}{X+\sqrt{2-X^2}+1}-\dfrac{1}{9}$ tương tự Mode 7 Table với **Start 0** = , **End 1,5** = , **Step 0.1** =

- Với $x=X, y=0,5, z=\sqrt{1,75-X^2}$

$$g(x)=\frac{X^2}{X^2+0,5\sqrt{1,75-X^2}+X+1}+1-\frac{X+1}{X+1,5+\sqrt{1,75-X^2}}-\frac{1+0,5\sqrt{1,75-X^2}}{9}$$

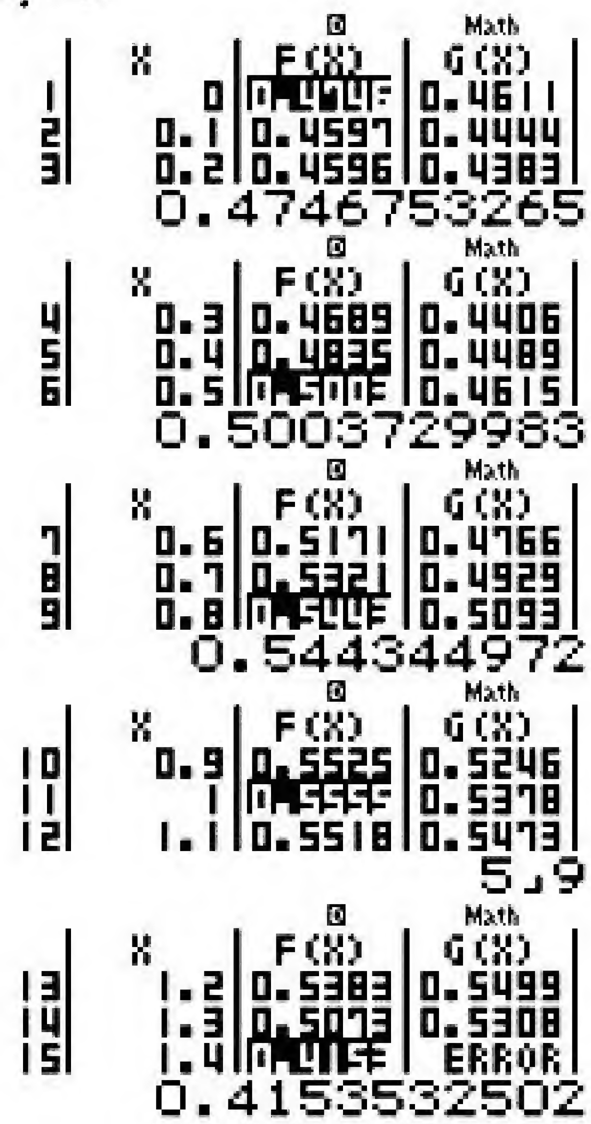
Ở bài này do đoạn nhỏ để nâng cao tính chính xác thì anh sẽ cho $y:0\rightarrow 0,5\rightarrow 1\rightarrow \sqrt{2}$

Xong đợt 1 ta ghi kết quả ra giấy nháp và làm đợt 2 :

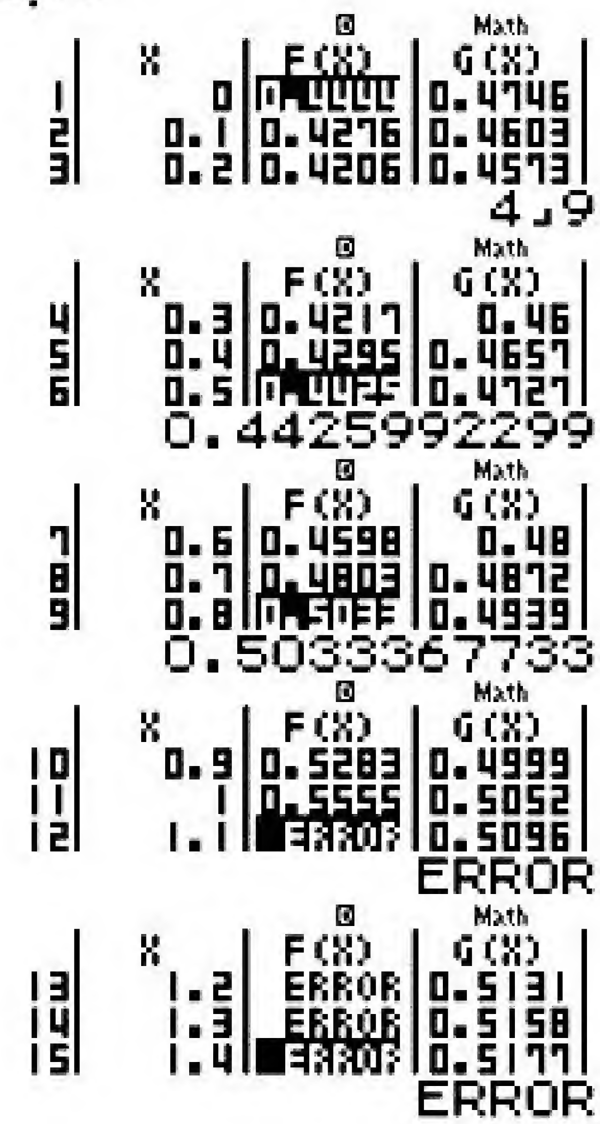
- Với $x=X, y=1, z=\sqrt{1-X^2}$: $f(x)=\dfrac{X^2}{X^2+\sqrt{1-X^2}+X+1}+1-\dfrac{X+1}{X+2+\sqrt{1-X^2}}-\dfrac{1+\sqrt{1-X^2}}{9}$

- Với $x=X, y=\sqrt{2}, z=X$: $g(x)=\dfrac{X^2}{X^2+X\sqrt{2}+X+1}+1-\dfrac{X+1}{X+\sqrt{2}+X+1}-\dfrac{1+X\sqrt{2}}{9}$

Đợt 1:



Đợt 2:



Nhận xét:

Ở Đợt 1:

Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp :

$X = 1 \to P = 5/9$

Và nó là lớn nhất luôn , X tăng thì các giá trị lại giảm rồi lại tăng lên tới X=1 rồi lại giảm chứng tỏ đây là 1 cực đại

Cột G(X) thì không thấy giá trị đẹp và cũng không có giá trị nào lớp hơn 5/9

Đợt 2:

Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp :

$X = 0 \to P = 4/9$

$X = 1 \to P = 5/9$

X tăng thì F(X) giảm xong lại tăng tới 5/9 là không tăng được nữa

Cột G(X) ta không thấy giá trị nào đẹp và cũng không có giá trị nào lớn hơn 5/9

Vậy tóm lại

Max là 5/9 với

$x = 1, y = 0, z = 1$ Hoặc $x = 1, y = 1, z = 0$

Vậy khả năng cao dồn biến

$t = x + y + z = 2$

Đặt : $t = x + y + z$

$0 \le t^2 = (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \to t \in [0, \sqrt{6}]$

Bây giờ ta xử lí $P = \dfrac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \dfrac{y + z}{x + y + z + 1} - \dfrac{1 + yz}{9} \le f(t)$

Làm sao để đưa được về ẩn t, xử từng em 1 nhé:

$A = \dfrac{x^2}{x^2 + yz + x + 1}$ thay $x = 1, y = 0, z = 1$ vào được $A = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{x + y + z + 1} = \dfrac{x}{x + y + z + 1}$

$B = \dfrac{y + z}{x + y + z + 1}$ **nếu đánh giá được cái A với** $\dfrac{x}{x + y + z + 1}$ **thì A+B sẽ rất đẹp, ta thử xem:**

Cần chứng minh: $\dfrac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} \le \dfrac{x}{x + y + z + 1}$

$\Leftrightarrow x(x + y + z + 1) \le x^2 + yz + x + 1$

$\Leftrightarrow xy + xz \le yz + 1$ **Ta cố ý nhân 2 để đưa nó về bình phương.**

$\Leftrightarrow 2xy + 2xz \le 2yz + 2$

$\Leftrightarrow 2 - 2xy - 2xz + 2yz \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \ge 0$ **@@ đúng quá, lại còn rất tự nhiên nữa, Đẳng…..**

$\Leftrightarrow (x - y - z)^2 \ge 0$

$C=\dfrac{1+yz}{9}\geq ???(x+y+z)$ **Thay** $x=1, y=0, z=1$ được $C=\dfrac{1}{9}=\dfrac{x+y+z}{18}=\dfrac{(x+y+z)^2}{36}$

Đừng em nào dại dột $y^2+z^2\geq 2yz$ @@ nhé chú ý cái dấu "=" kia

Ta biết thừa dấu = xảy ra khi $x=y+z$ **tức là ta cần sử dụng** $x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)$

Tư duy 1 chút sẽ thấy như sau:

$x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)\rightarrow 2+2yz\geq 2xy+2xz$

$\rightarrow 2+4yz\geq 2xy+2xz+2yz$

$\rightarrow 2+4yz+(x^2+y^2+z^2)\geq 2xy+2xz+2yz+(x^2+y^2+z^2)$

$\rightarrow 4+4yz\geq (x+y+z)^2\rightarrow 1+yz\geq \dfrac{(x+y+z)^2}{4}$

Phần trên là phân tích ngược, giờ các em chỉ cần chứng minh ngược lại là được:

$(x+y+z)^2=2xy+2xy+2yz+(x^2+y^2+z^2)=2x(y+z)+2+2yz\leq x^2+(y+z)^2+2+2yz=4+4yz$

$\rightarrow 1+yz\geq \dfrac{(x+y+z)^2}{4}$

Ta có: $P\leq \dfrac{x+y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{(x+y+z)^2}{36}=\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{t^2}{36}=f(t), t\in[0,\sqrt{6}]$

Đến đây có thể thở phào nhẹ nhõm ẵm gọn con 10 rồi @@

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}-\dfrac{t}{18}=-\dfrac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2}$ $f'(t)=0\leftrightarrow t=2$

$f(0)=0; f(2)=\dfrac{5}{9}, f(\sqrt{6})=\dfrac{31}{30}-\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ **Lập BBT rồi suy ra** $P\leq f(t)\leq\dfrac{5}{9}\rightarrow P_{Max}=\dfrac{5}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1, y=1, z=0\\ x=1, y=0, z=1\end{array}\right.$

Đề của khối A thường là các câu khó, ta sẽ cày tiếp 1 câu khối A

Bài 3 (ĐH-B2013) Cho a, b, c *là* các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

Phân tích:

Ở những bài chỉ cho điều kiện $a,b,c>0$ mà không cho mối liên hệ giữa a,b,c thì thường là $a=b=c$ nhưng vấn đề là nó bằng bao nhiêu?

Khi đó ta có $P=\dfrac{4}{\sqrt{3a^2+4}}-\dfrac{9}{2a\sqrt{9a^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3a^2+4}}-\dfrac{9}{6a^2}$ để cái căn kia nguyên thì a=2 là đẹp nhất

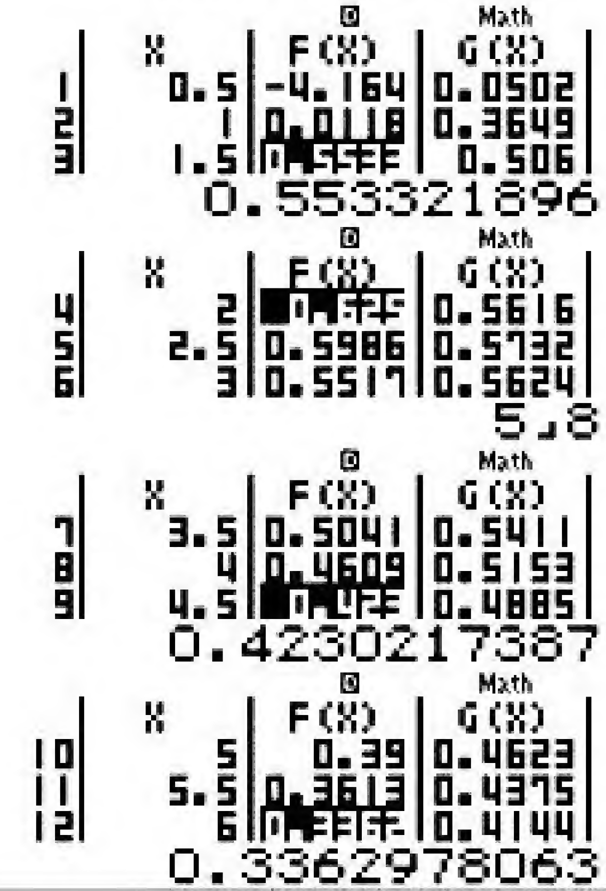
Ta sẽ check nhanh bằng máy xem a=b=c=2 đã là lớn nhất chưa

Với chúng khác nhau thì sao, ở đây Start các em cho 0,5 = vì nhập 0 là lỗi , End để hẳn 10 = , Step 0,5 =

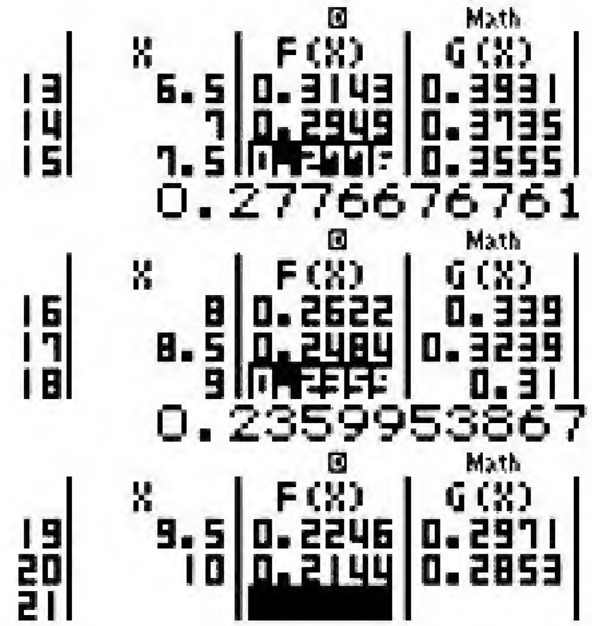
Với trường hợp $a\neq b\neq c$ thì các em cứ để tùy ý

$a=b=c$	$a=X\neq b=1\neq c=2$: cứ thay đổi tùy ý	Nhận xét

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{3a^2+4}}-\frac{9}{6a^2}$$



$$g(x)=\frac{4}{\sqrt{a^2+9}}-\frac{9}{(a+1)\sqrt{(a+4).5}}$$



Ta thấy tại $a=b=c=2$ kết quả vẫn là đẹp nhất và lớn nhất hội Nên dự đoán của chúng ta là đúng.

Bây giờ chỉ cần ghép hợp lí để dồn biến về $t=a+b+c=6$ là xong

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\le f(t)$$

$A=\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\le\dfrac{?}{a+b+c+?}$, thay a=b=c=2 được A=1 $\to A=\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\ge\dfrac{8}{a+b+c+2}$

do a=b=c=2 rồi nên ta nhớ lại đánh giá cũ chuối của chúng ta:

$$a^2+b^2+c^2+4=a^2+b^2+c^2+2^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+2)^2}{2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+2}{2}\right)$$

$$\to A=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}\le\frac{8}{a+b+c+2}$$

$B=\dfrac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\ge\dfrac{?}{(a+b+c)^2}$ Thay thay a=b=c=2 được $B=\dfrac{3}{8}$

Với a=b=c hiển nhiên ta có $a+2c=b+2c$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(a+b)\frac{1}{2}[(a+2c)+(b+2c)]=\frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c)\le\frac{1}{6}.\frac{1}{4}[4(a+b+c)]^2=\frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

Chỗ này rất quan trọng nhé: $a+b+4c=a+b+2(a+b)=3(a+b)$ rồi áp dụng $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$

Do đó mà có động thái nhân thêm 3 để nó bảo toàn cái dấu "=" của BĐT

$$B=\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\ge 9.\frac{3}{2(a+b+c)^2}$$

$$\Rightarrow P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\le\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}=f(t),t>0$$

$$f'(t)=-\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}$$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 27(t+2)^2-8t^3=0\Leftrightarrow t=6$

t	0		6		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{5}{8}$	↘	

$P\le f(t)\le\frac{5}{8}$; $\max P=\frac{5}{8}$ xảy ra khi a = b = c = 2.

Loại 2 : Dồn từ 3 biến thành 2 biến , rồi 2 biến thành 1 biến ; BĐT 2 biến

Đây là dạng đơn giản hơn, dạng này thường có dấu hiệu là có điều kiện của biến nhưng khuyết mối liên hệ giữa 3 biến hoặc mối liên hệ mờ nhạt, biểu thức cần tính thì có 2 biến đối xứng và thường chỉ cần chia đi 1 biến không đối xứng ta sẽ chỉ còn 2 biến và dồn về 1 biến nữa là xong.

1 nhận xét thêm nữa là những dạng này thường là ở dạng phân số và có tử và mẫu đồng bậc

Bài 1(ĐH - A2013) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Phân tích:

Điều kiện : $a,b,c>0$

Mối liên hệ: $(a+c)(b+c)=4c^2$ với mối liên hệ này ta khó lòng rút ra được ngay $c=??f(a,b)$

Nó cũng gợi ý nhỏ cho ta là chia đi vì 2 vế đồng bậc

$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$ gợi ý cho ta như sau:

$\frac{32a^3}{(b+3c)^3}\rightarrow$ **tử và mẫu đồng bậc nên thường chia đi, tương tự** $\frac{32b^3}{(a+3c)^3},\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Và chú ý là a,b có thể thay đổi cho nhau nhưng lại không thể thay cho c , nên thường ta chia cho c,c^2,c^3 tùy vào bậc của a,b

Vậy việc đầu tiên là chia đi và đổi 3 biến thành 2 biến:

$$\begin{cases}(a+c)(b+c)=4c^2\\ P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(\frac{a}{c}+1)(\frac{b}{c}+1)=4\\ \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{[\left(\frac{b}{c}\right)+3]^3}+\frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{[\left(\frac{a}{c}\right)+3]^3}-\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2}\end{cases}$$ Đặt : $x=\frac{a}{c},y=\frac{b}{c};x,y>0$

$$\rightarrow\begin{cases}(x+1)(y+1)=4\rightarrow x+y+xy=3\\ P=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$ tới đây ta thấy bài toán đơn giản hơn nhiều, bay giờ tiếp tục dồn về 1 biến duy nhất nhưng trước hết ta phải khảo sát ngay xem nó đạt cực đại tại đâu:

$$x+y+xy=3\rightarrow y=\frac{3-x}{1+x};x,y\in(0;1]$$

Ta sẽ cho x chạy từ 0 tới 1 nhé bấm 1 bảng F(x) thôi, bỏ bảng G(X) bằng cách bấm "="

$$F(x)=\frac{32x^3}{(\frac{3-x}{1+x}+3)^3}+\frac{32\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^2}$$ với Start 0 = ,End 1 = , Step 0,1 =

Khi nhập đứng là max nhọ vì thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa thôi, ta thử rút gọn tối đa xem, không ta sẽ phải dùng 1 cách khác

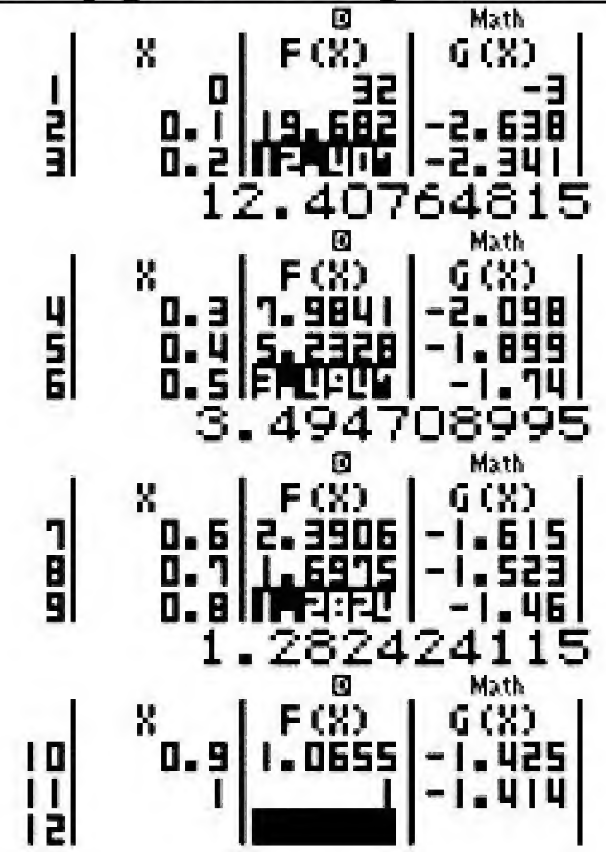
Vâng, thực sự là trờ không phù hộ ta còn thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa là xong, Đúng là trời đã sinh Table sao lại còn sinh ra giới hạn bộ nhớ RAM

Rất may cho các thanh niên dùng Fx 570 vn plus ta còn bảng G(X) bơ vơ

Ta nhập :

$$F(x)=\frac{32x^3}{(\frac{3-x}{1+x}+3)^3}+\frac{32\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3};G(X)=-\sqrt{x^2+\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^2}$$ với Start 0 = ,End 1 = , Step 0,1 =

$$P=F(X)+G(X)$$



Chúng ta ghi các kết quả sau ra giấy và tiến hành cộng tay

Loại cái dòng x=0 đi nhé vì điều kiện ban đầu.

Để ý thì thấy mỗi X=1 thì F(X) đẹp, ngó qua thằng G(X) thấy quen quen ^_^ hình như là $\sqrt{2}$ cơ mà mình cũng chả quan tâm, chủ yếu là quan tâm xem dấu = ở đâu.

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
P ≈	17.5	10.1	5.8	3.3	1.7	0.8	0.1	-0.2	-0.3	-0.4

Thực ra thì 1 lúc ta thấy nó giảm là có thể đoán ngay được hoặc là từ X=0,1 đến 0,7 là nó dương đoạn sau lại âm là ta cũng có thể đoán nhanh chỉ tính đoạn sau thôi cũng được, ở đây anh thống kê cho dễ hiểu

Ta thấy ngay $x=1 \to P_{min} = 1-\sqrt{2}$

Vậy rõ ràng $x=y=1$ ta sẽ dồn biến về $t=x+y=2$ và đánh giá thoải mái miễn x=y

Đặt $t=x+y=2$

Xử lí điều kiện :

$3 = x+y+xy \le x+y+\dfrac{(x+y)^2}{4} \leftrightarrow t^2+4t-12 \ge 0 \leftrightarrow t \ge 2$ Mặt khác $t = 3-xy < 3 \to t \in [2;3)$

Giờ ép về cái hàm đồng biến là xong

$$P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2+y^2} \ge f(t), t \in [2,3)$$

$A = \dfrac{32x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} \ge ?\, f(x+y)$ thay $x=y=1$ vào ta được : $A = 1 = x+y-1 = (x+y-1)^2 = (x+y-1)^3$

Với x = y thì ta thấy $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3} = \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+3} = \dfrac{y}{x+3}$ nên ta cần áp dụng BĐT gì đó để cho 2 thằng đó bằng nhau mục đích là $\dfrac{x}{y+3} + \dfrac{y}{x+3}$ đưa được về dạng (x+y)

Ta thấy A có dạng : $A = 32(u^3+v^3)$

Mà $u^3+v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) \ge (u+v)^3 - 3.\dfrac{(u+v)^2}{4}.(u+v) = \dfrac{(u+v)^3}{4}$

$$\to A = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \ge 8\left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}\right)^3 = 8\left(\frac{x^2+3x+y^2+3y}{xy+3(x+y)+9}\right) = 8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)$$

Các em thế $xy = 3-(x+y)$ vào, trâu bò phết đó @@

$$8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)^3 = 8\left(\frac{t^2-2(3-t)+3t}{3-t+3t+9}\right)^3 = 8\left(\frac{t^2+5t-6}{2(t+6)}\right)^3 = (t-1)^3$$

Em khó nhất xong rồi, còn em này nữa

$\sqrt{x^2+y^2} \le ???\, f(x+y)\dfrac{1}{2}$ chả có cái đánh giá Cô-si nào làm được cái tổng mà lại lớn hơn tổng bình phương này, keke

Ta có: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2(3-t)=t^2+2t-6 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{t^2+2t-6}$

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}\ge (t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}=f(t),t\in[2,3)$$

Bài này trâu thật, đến cái hàm cũng cho xấu kinh khủng

$f'(t)=3(t-1)^2-\dfrac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2-7}}=3(t-1)^2-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{7}{(t+1)^2}}}\ge f'(2)=3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}>0$ hàm đồng biến nên nhỏ nhất tại t=2

@@ hơi bị nản rồi ý, có khi lấy 9,75 thôi :D

Vậy: $P\ge f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$ Do đó $P_{\min}=1-\sqrt{2}\leftrightarrow x=y=1\rightarrow a=b=c$

Bài 2(B-2014): Cho các số thực a, b, c không âm và thỏa mãn điều kiện (a+b)c >0.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}$$

Phân tích:

Câu này tương tự nhé các em, cũng chia đi rồi đặt và thậm chí dễ hơn câu trên nhiều, vẫn ghép 2 thằng đầu với nhau để dồn biến

Do a,b đối xứng và c lạc loài nên chia đi c, thực ra thì điều kiện $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\(a+b)c>0\end{cases}\rightarrow c>0,a+b>0$ đã gợi ý chia c rồi

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}=\sqrt{\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}}+\sqrt{\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}}+\frac{1}{2\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)}$$

Đặt : $x=\dfrac{a}{c},y=\dfrac{b}{c};x,y\ge 0\ \Rightarrow P=\sqrt{\dfrac{x}{y+1}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}+\dfrac{1}{2(x+y)}$ bây giờ làm sao để dồn về 1 biến cuối cùng

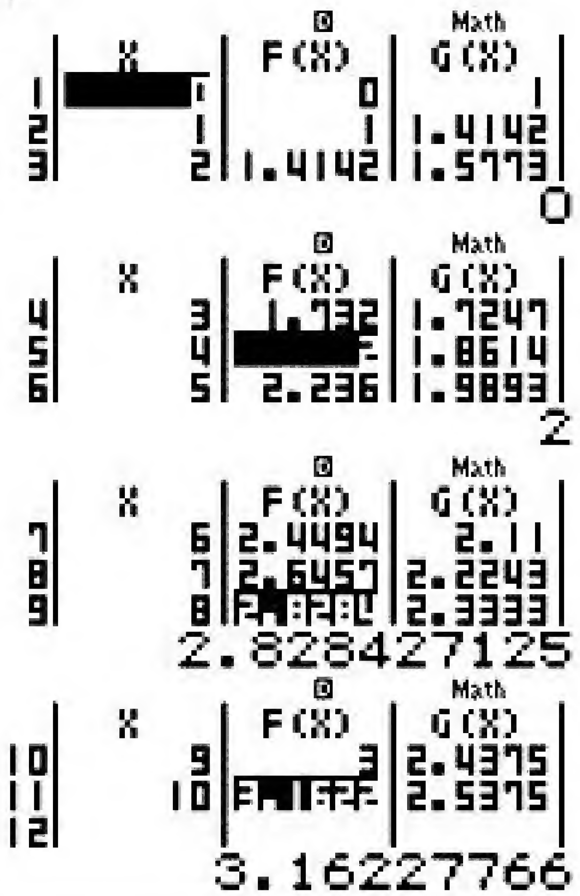
Ta chỉ cần xử lí $A=\sqrt{\dfrac{x}{y+1}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}\ge ???f(x+y)$ là xong

Bây giờ ta cần xem xét dấu "=" xảy ra tại đâu đã
Do khoảng của Y khá là rộng chứ không thuộc 1 đoạn hẹp nên vấn đề chọn Y cũng khá nhức nhối
Ta sẽ thử từ $y:0\rightarrow 1\rightarrow 2\rightarrow 3$ xem A biến thiên như thế nào?

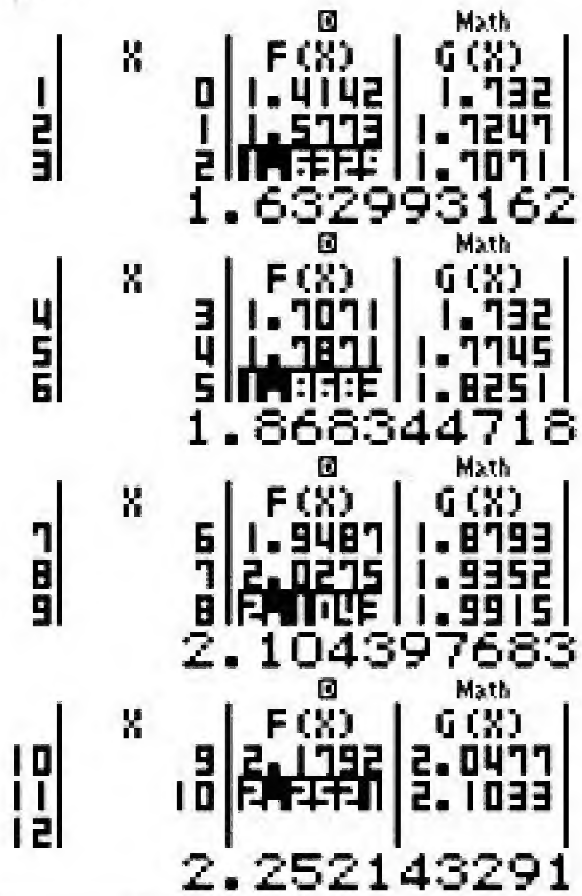
Đợt 1 : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{0+1}}+\sqrt{\dfrac{0}{x+1}}$ $\quad g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+1}}+\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ với Start 0 = End 10 = step 1 =

Đợt 2: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2+1}}+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$ $\quad g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{3+1}}+\sqrt{\dfrac{3}{x+1}}$ với Start 0 = End 10 = step 1 =

Đợt 1



Đợt 2



***Đợt 1:**
Ta thấy ngay X tăng thì giá trị A tăng, **Y tăng thì giá trị P giảm kể từ khi X=1**
Các em chú ý này Y tăng thì nhìn từ F(x) sang G(X) còn X tăng thì nhìn thẳng hàng dọc từng cột.
Chúng ta bỏ ô x=y=0 nhé vì điều kiện.
Nhìn toàn bộ bảng ta chỉ thấy duy nhất
A=1 là nhỏ nhất khi đó
X=1,Y=0 hoặc X=0, Y=1
Tức là X+Y=1
Ở ví dụ này tính may mắn khá cao, là nếu họ cho điểm rơi x,y không nguyên hay đẹp thì khó, nói chung là các em cứ chia y đủ nhỏ làm sao mà bấm ra được giá trị đẹp

Bây giờ thì ta chỉ biết giữ vững niềm tin dồn về $t = x + y = 1$ và dấu "=" khi $x = y + 1$ hoặc $y = x + 1$
Do tính chất đối xứng nên cặp x=1,y=0 mới sinh ra thêm hoán vị x=0,y=1 như ở các ví dụ trước.
Ta xem xét từng biểu thức: nếu $x = y + 1$

$x + (y+1) \ge 2\sqrt{x(y+1)} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+y+1} \le \dfrac{x}{2\sqrt{x(y+1)}} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x}{y+1}} \ge \dfrac{2x}{x+y+1}$ dấu = khi x=y+1 hoặc x =0 (cái này do mình lấy x chia cho 2 vế nên nó tạo ra thêm)

Tương tự $\sqrt{\dfrac{y}{x+1}} \ge \dfrac{2y}{x+y+1}$ dấu "=" khi y=x+1 hoặc y=0

Vậy : $A = \sqrt{\dfrac{x}{y+1}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+1}} \ge \dfrac{2(x+y)}{x+y+1}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{2(x+y)} \ge \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{2t} = f(t), t > 0$$

$f'(t) = \dfrac{2}{(t+1)^2} - \dfrac{1}{2t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 = (t+1)^2 \Leftrightarrow 2t = t+1 \Leftrightarrow t = 1$ (do $t > 0$ mới đưa ko cần giá trị tuyệt đối nhé)

Giờ các em lập BBT suy ra $P \ge f(t) \ge f(1) = \dfrac{3}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y+1, y = 0 \rightarrow b = 0, a = c \\ y = x+1, x = 0 \rightarrow a = 0, b = c \end{array}\right.$

* Các BĐT 2 biến trong đề thi

Bài 1 (D-2014): Cho hai số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

Phân tích:

Ta có : $x, y \in [1;2]$ và trong P chúng đối xứng với nhau

Bài này cái điều kiện giống đề 2016 nên ta cũng xử lí nó tương tự như vậy :

$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \le 0 \\ (y-1)(y-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 3x-2 \\ y^2 \le 3y-2 \end{cases}$ Đây gọi là đánh giá ở Biên, nếu dấu "=" xảy ra tại Biên thì ta sử dụng luôn còn không thì toạch :3 keke, phải nghĩ sang hướng khác

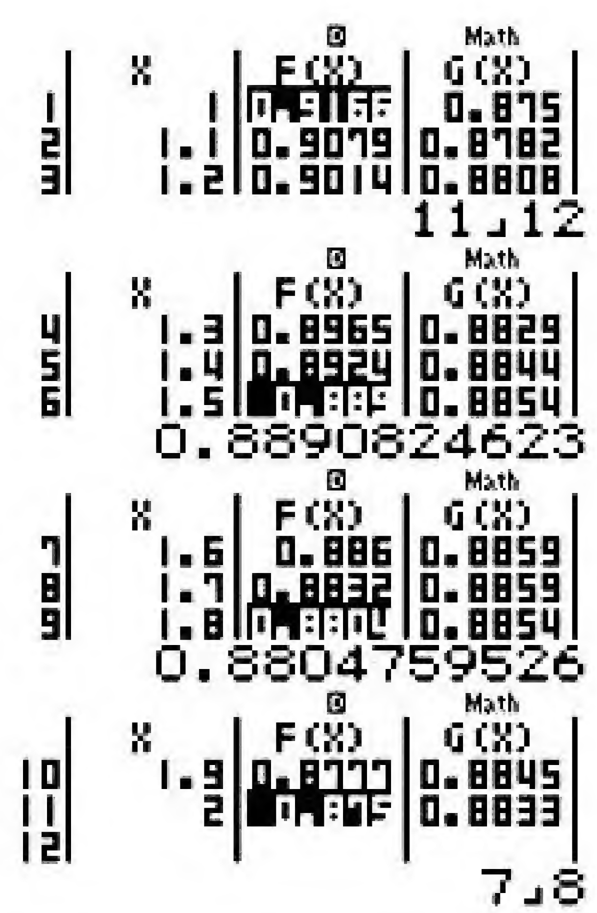
Lại bấm máy thần trưởng, ôi mệt……

Ta chỉ cần xét $y=1, y=2$ thôi

Tới đây mới bật bí: Thường người ta cho dấu "=" của BĐT xảy ra tại biên như vậy các biến lệch nhau mới khó nên anh thường cho y kẹp 2 đầu mút khi bấm 1 lần là do thế, khi nào không thấy giá trị đẹp hay cẩn thận thì mới chia nhỏ thêm y ra mà bấm

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+8} + \frac{1+2x}{6+3x} + \frac{1}{4x}$ $\qquad g(x) = \frac{x+4}{x^2+11} + \frac{2+2x}{3x+9} + \frac{1}{4(x+1)}$

với Start 1 = End 2 = và Step 0.1 =



Nhìn vào cột F(X) trước ta thấy nó giảm dần có các giá trị đẹp là

$X=1 \rightarrow P=11/12 \qquad X=2 \rightarrow P=7/8$

Nhìn cột G(X) ta thấy nó tăng giảm lẫn lộn @@

Nhưng có giá trị đẹp là :

$X=1 \rightarrow P=7/8 \qquad X=2, P=53/60$

Giá trị 7/8 cứ được lặp lại do tính chất đối xứng của biến và nó cũng nhỏ nhất hội

Vậy gia cát dự là $P_{\min} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=1, y=2 \end{array}\right.$

Vậy ta cần áp dụng BĐT biên vào P

$$P \geq \frac{x+2y}{3(x+y)+3} + \frac{y+2x}{3(x+y)+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$$

Đặt $t = x + y$, ĐK: $2 \leq t \leq 4$

$$f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}, t \in [2;4]$$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(t-1) = t+1 \Leftrightarrow t = 3$$

Ta có $f(3) = \frac{7}{8}$. Khi $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ y = 1 \vee y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$. Vậy $P_{min} = \frac{7}{8}$ tại $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 2 (D-2013): Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}.$$

Phân tích:

Đây là 1 dạng toán BĐT cơ bản, chia đi rồi đặt ẩn phụ và xét hàm đơn thuần nên không cần thiết phải sử dụng máy tính.

Từ giả thiết ta có: $xy \leq y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}} - \frac{\frac{x}{y}-2}{6\left(\frac{x}{y}+1\right)}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, điều kiện $0 < t \leq \frac{1}{4}$

$$P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$$

Xét $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$ với $0 < t \leq \frac{1}{4}$

$$f'(t) = \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$\forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]: \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} \geq \frac{8\sqrt{5}}{27}, \quad \frac{1}{2(t+1)^2} < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f$ đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$

Vậy $P_{max} = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$ khi $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$